第 39 卷 第 6 期 2022 年 12 月
应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics
Vol. 39 No. 6 Dec. 2022

文章编号:1000-4939(2022)06-1086-10

基于边界元的超定法计算板切口应力强度因子

刘静雯,程长征,黄一帆,王飞炀,李腾岳

(合肥工业大学土木与水利工程学院,230009 合肥)

摘 要:板切口尖端的奇异应力场影响结构安全,需要对含切口板进行强度计算。文章首先根据中厚板的弹性控制方程,利用切口特征渐近展开理论,推演出中厚板切口的奇性特征方程,引入插值矩阵法进行求解,获得板切口的奇异性指数、特征角函数及其导数。之后使用边界元法,求解切口板内离切口尖端等距离圆弧上点的位移,并将其代入切口尖端位移渐近展开式,形成一组非正定方程组,采用超定法求解,获得渐近展开式的幅值系数,据此进一步计算出切口板的应力强度因子。文章分别计算了板切口在对称荷载、反对称荷载以及复合型荷载作用下的应力强度因子。

关键词:板切口;应力强度因子;超定法;边界元法

中图分类号:TU501 **文献标志码:**A **DOI:**10.11776/j.issn.1000-4939.2022.06.009

Evaluation of stress intensity factors of notched plate by an over-deterministic method basing on the boundary element method

LIU Jingwen, CHENG Changzheng, HUANG Yifan, WANG Feiyang, LI Tengyue

(School of Civil and Hydraulic Engineering, Hefei University of Technology, 230009 Hefei, China)

Abstract: The singular stress field near the vertex of a notched plate will affect the safety of structure. It is necessary to evaluate the strength of a notched plate. The singular characteristic equation of the notch in a plate is firstly established, basing on the elastic governing equation of a plate and the asymptotic expansion theory near the notch tip. The interpolating matrix method is then introduced to solve it for getting the singularity orders, characteristic angle functions and their derivatives of the notch. The boundary element method is thereafter applied to determine the displacements of the inner points on the arc around the notch tip. The displacement values are substituted into the asymptotic expansion to form a set of non-positive definite equations, which are solved by the over-deterministic method to obtain the amplitude coefficients in the asymptotic expansion. The stress intensity factors are further given out basing on the amplitude coefficients. The stress intensity factors of the notched plate under the symmetrical load, anti-symmetric load and mixed-mode load are respectively investigated.

Key words: notched plate; stress intensity factors; over-deterministic method; boundary element method

收稿日期:2022-09-13 **修回日期:**2022-11-15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 12172114);安徽省杰出青年自然科学基金资助项目(No. 2208085J25)

通信作者:程长征,教授,博士生导师。E-mail: changzheng.cheng@hfit.edu.cn

引用格式:刘静雯,程长征,黄一帆,等.基于边界元的超定法计算板切口应力强度因子[J].应用力学学报,2022,39(6):1086-1095.

LIU Jingwen, CHENG Changzheng, HUANG Yifan, et al. Evaluation of stress intensity factors of notched plate by an over-deterministic method basing on the boundary element method[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2022, 39(6):1086-1095.

板作为工程结构常见形式，广泛用于航空、航天、汽车、土木等领域。针对板的力学分析，最初使用的是忽略了板横向剪切作用的 Kirchhoff 薄板理论[1]，认为板的位移仅有挠度。对于薄板，由于转角位移贡献较小，该理论可较好地适用。当板厚逐渐增大时，横向剪切作用不可忽略，板的转角位移对板的变形影响较大，需要建立新的理论来描述板的变形，由此产生了 Mindlin 中厚板理论[2]以及 Reissner 中厚板理论[3-4]，这二者的不同在于针对剪切力的计算所采用的系数不同，具体数值可参见文献[2-4]。本研究使用 Reissner 中厚板理论研究板弯曲问题。

板结构在设计和使用过程中容易形成切口，切口尖端会产生奇异应力，导致结构强度下降。切口奇异性研究始于平面问题，Williams[5]应用特征函数展开法给出了平面裂纹尖端附近的位移场和应力场。后续此法被应用到板裂纹问题中，得出了一些基于 Kirchhoff 薄板理论的，较为典型的薄板弯曲断裂问题的应力强度因子解析解[6]。由于 Kirchhoff 薄板理论忽略横向剪切变形，不能获得含裂纹板弯曲的Ⅲ型应力强度因子，无法建立完整的板弯曲断裂准则。为解决这一问题，基于 Reissner 中厚板理论的断裂问题研究受到了人们的关注。对于含裂纹无限大板弯曲断裂问题，学者们逐步给出了裂纹尖端的应力分布[7]，以及某些特定荷载作用下的应力强度因子结果[8]，而后根据 Williams 特征函数渐近展开法，给出对称/反对称位移及内力的表达式[9]。对于含切口的中厚板的断裂问题，由于其应力奇异性与切口角度相关，相较于裂纹问题，其求解难度较大。Qian 等[10]应用双重幂级数展开的方式获得了中厚板切口尖端的位移及应力表达式。Yao 等[11]基于辛对偶求解体系同样给出了中厚板切口/裂纹的位移及应力表达式，并与有限元法结合获得了相应的应力强度因子。

边界元法[12-13]作为一种高效的数值计算方法，相较于有限元法，具有降维的特点，且由于采用积分的形式获得待求解方程，不会导致精度损失，因此精度较高。学者们一直致力于研究如何应用边界元法求解板弯曲问题。首先应用边界元法解决了薄板弯曲问题[14-15]，随后又将边界元法应用到中厚板弯曲问题，与 Reissner 中厚板理论结合，产生了专门求解中厚板的边界元法[16-18]。

应用 Williams 特征渐近展开的方法，将切口尖端位移场的渐近展开式引入中厚板控制方程，可推演出中厚板切口奇性特征方程[11]。切口奇性特征方程与裂纹奇性特征方程形式一致，是一组超越方程，然而由于切口角度非零，导致难以获得解析解，一般采用数值方法进行求解，Niu 等[19]提出的插值矩阵法可以有效求解这类特征方程。切口奇性特征研究，只能获得反映切口奇异性强弱的奇异性指数以及特征角函数。运用奇性特征分析结果，计算切口的应力强度因子是另一个重要的研究课题。目前，有限元法[11,20-21]研究切口的应力强度因子主要方式为：将切口尖端物理场的特征函数渐近展开与有限元结合，求解渐近展开幅值系数，最后得出应力强度因子。应用边界元法求解中厚板应力强度因子的文献主要集中在裂纹问题上[22-23]。但应用边界元法分析含切口板的问题尚未展开。

本研究基于切口尖端的特征渐近展开技术，将切口尖端的位移渐近展开式引入中厚板控制方程，获得板切口的奇性特征方程。利用插值矩阵法进行求解，获得板切口的位移渐近展开式的奇异性指数、特征角函数及其一阶导数。再利用边界元法计算切口板在荷载作用下的内点位移，然后将所得位移值代入板切口尖端的特征渐近展开式，形成一组非正定方程，运用基于最小二乘法原理建立的超定法[24]求解，获得板切口特征渐近展开式的幅值系数，最后根据幅值系数、特征角函数及其一阶导数计算出板切口的应力强度因子。

1　中厚板切口奇异特征分析

考虑如图 1(a)所示的中厚板切口，板宽 W，长 L，板厚 h。切口板中面见图 1(b)，切口两径向边界分别位于 $\theta=\theta_1$ 和 $\theta=\theta_2$ 上，切口张角 $\alpha=\theta_1-\theta_2$。考虑板的横向剪切变形，板的位移分量包括两个转角位移分量 ψ_x、ψ_y 和一个挠度位移分量 w，见图 1(c)。

将位移分量 ψ_x、ψ_y、w 代入中厚板的弹性力学平衡方程，可以获得用位移表示的中厚板控制方程[2-3,11]为

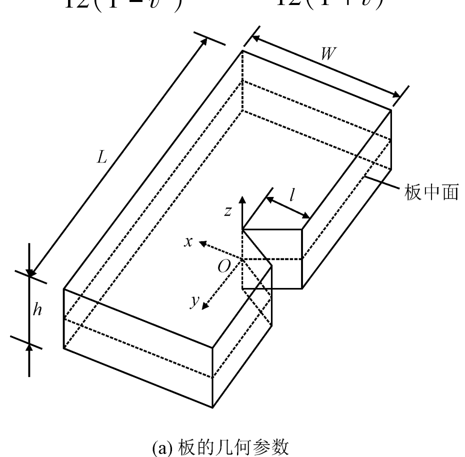
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\dfrac{1-v}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2}+\dfrac{1+v}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}+\dfrac{C}{D}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}-\psi_x\right)=0\\ \dfrac{1+v}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}+\dfrac{1-v}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}+\dfrac{C}{D}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}-\psi_y\right)=0\\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\dfrac{\partial\psi_x}{\partial x}-\dfrac{\partial\psi_y}{\partial y}=0\end{cases}\tag{1}$$

式中：v 为泊松比；D 和 C 分别为板的弯曲刚度和剪

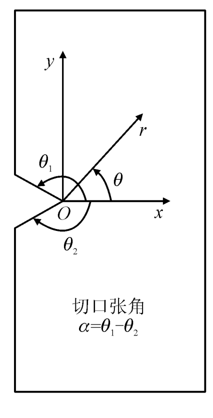
切刚度,且

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-v^2)},\quad C=\frac{5Eh}{12(1+v)} \tag{2}$$

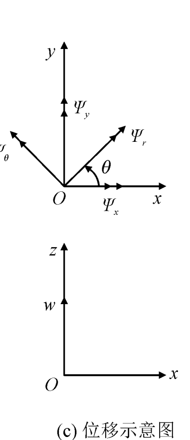
其中 E 为板的弹性模量。



(a) 板的几何参数



(b) 切口板中面



(c) 位移示意图

图 1 中厚板切口

Fig. 1 Medium thickness V-notched plate

为方便进行特征渐近展开分析,将直角坐标系下的中厚板控制方程进行坐标变换,得到极坐标系下的中厚板控制方程,即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi_r}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial\psi_r}{\partial r}-\dfrac{\psi_r}{r^2}+\dfrac{1-v}{2r^2}\cdot\dfrac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta^2}+\dfrac{1+v}{2}\cdot\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r\partial\theta}-\\ \dfrac{3-v}{2r^2}\cdot\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{C}{D}\cdot\left(\dfrac{\partial w}{\partial r}-\psi_r\right)=0\\ \dfrac{1+v}{2}\cdot\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial^2\psi_r}{\partial r\partial\theta}+\dfrac{3-v}{2r^2}\cdot\dfrac{\partial\psi_r}{\partial\theta}+\dfrac{1-v}{2}\cdot\dfrac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r^2}+\\ \dfrac{1-v}{2}\cdot\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta^2}-\dfrac{1-v}{2}\cdot\dfrac{\psi_\theta}{r^2}+\\ \dfrac{C}{D}\left(\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial\theta}-\psi_\theta\right)=0\\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\left(\dfrac{\partial\psi_r}{\partial r}+\dfrac{\psi_r}{r}+\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}\right)=0\end{cases} \tag{3}$$

式中:ψ_r、ψ_θ 为 ψ_x、ψ_y 转换到极坐标系下的分量,指向参见图 1(c)。

为引入边界条件,这里仅列出中厚板的弯矩 M_θ、$M_{r\theta}$和剪力 Q_θ,它们与位移之间的关系为

$$\begin{cases}M_\theta(r,\theta)=-D\left[\dfrac{1}{r}\left(\psi_r+\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}\right)+v\dfrac{\partial\psi_r}{\partial r}\right)\\ M_{r\theta}(r,\theta)=-\dfrac{D(1-v)}{2}\left[\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial\psi_r}{\partial\theta}-\psi_\theta\right)+\dfrac{\partial\psi_\theta}{\partial r}\right]\\ Q_\theta(r,\theta)=C\left(\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial\theta}-\psi_\theta\right)\end{cases} \tag{4}$$

考虑自由边界条件,即切口表面无外力作用,可以表示为

$$\begin{cases}M_\theta(r,\theta)\,|_{\theta=\theta_1,\theta_2}=0\\ M_{r\theta}(r,\theta)\,|_{\theta=\theta_1,\theta_2}=0\\ Q_\theta(r,\theta)\,|_{\theta=\theta_1,\theta_2}=0\end{cases} \tag{5}$$

中厚板切口尖端附近的位移可以表达为级数渐近展开的形式[11],即

$$\begin{cases}\psi_r=\psi_{r0}+\sum\limits_{k=1}^{N}A_k r^{\lambda_k}\tilde{\psi}_r(\theta,\lambda_k)\\ \psi_\theta=\psi_{\theta0}+\sum\limits_{k=1}^{N}A_k r^{\lambda_k}\tilde{\psi}_\theta(\theta,\lambda_k)\\ w=w_0+\sum\limits_{k=1}^{N}A_k r^{\lambda_k}\tilde{w}(\theta,\lambda_k)\end{cases} \tag{6}$$

式中:ψ_{r0}、$\psi_{\theta0}$和 w_0 是极坐标系下切口尖点的位移分量;A_k 为幅值系数;λ_k 为奇异性指数,下文简写为 λ;$\tilde{\psi}_r(\theta,\lambda_k)$、$\tilde{\psi}_\theta(\theta,\lambda_k)$和 $\tilde{w}(\theta,\lambda_k)$为特征角函数,下文分别简写为 $\tilde{\psi}_r$、$\tilde{\psi}_\theta$ 和 $\tilde{w}$;N 为级数渐近展开式截取的项数,截取的级数项数越多,位移的计算精度越高,能精确表达的位移场距离也越远。将式(6)代入式(3),令 r 的同阶系数之和为 0,可以获得中厚板切口的奇性特征方程,即

$$\begin{cases}\dfrac{1-v}{2}\tilde{\psi}_r''-\dfrac{3-v}{2}\tilde{\psi}_\theta'-\tilde{\psi}_r+\lambda\dfrac{1+v}{2}\tilde{\psi}_\theta'+\lambda^2\tilde{\psi}_r=0\\ \tilde{\psi}_\theta''+\dfrac{3-v}{2}\tilde{\psi}_r'-\dfrac{1-v}{2}\tilde{\psi}_\theta+\lambda\dfrac{1+v}{2}\tilde{\psi}_r'+\lambda^2\dfrac{1-v}{2}\tilde{\psi}_\theta=0\\ \tilde{w}''+\lambda^2\tilde{w}=0\end{cases} \tag{7}$$

式中：$(\cdots)'$ 和 $(\cdots)''$ 分别表示对 θ 求一阶导和二阶导。

将式(6)引入式(4)，再代入到边界条件式(5)，可以获得用位移特征角函数及其导数表示的边界条件，即

$$\begin{cases} (\tilde{\psi}_\theta' + \tilde{\psi}_r + \lambda v \tilde{\psi}_r)\big|_{\theta=\theta_1,\theta_2} = 0 \\ (\tilde{\psi}_r' - \tilde{\psi}_\theta + \lambda \tilde{\psi}_\theta)\big|_{\theta=\theta_1,\theta_2} = 0 \\ \tilde{w}'\big|_{\theta=\theta_1,\theta_2} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

应用 Niu 等[19]提出的插值矩阵法，求解边界条件式(8)下的中厚板切口奇性特征方程式(7)，可以获得切口的奇异性指数、特征角函数及其一阶导数。

表 1 给出了中厚板切口前三阶应力奇异性指数计算结果，其中，λ_1、λ_2 对应面内拉伸和面内剪切所产生的Ⅰ型和Ⅱ型应力奇异性指数，λ_3 对应面外剪切所产生的Ⅲ型应力奇异性指数。奇异性指数来源于特征函数渐近展开，可参见公式(6)，不同角度的切口奇异性指数大小不同。一般来说，裂纹的一阶奇异性指数最小，应力的奇异性强度与奇异性指数大小呈负相关，即奇异性指数越小，切口/裂纹尖端的应力奇异性越大。从表中可以看出，当切口张角 $\alpha > 180°$ 时就会产生Ⅰ型和Ⅲ型应力奇异性，而只有切口张角 $\alpha > 240°$ 时才会产生Ⅱ型应力奇异性。在表 1 中，本研究结果与参考解[25]进行了对比，发现本研究结果与参考解的吻合度能达到小数点后五位有效数字。

表 1　中厚板切口前三阶应力奇异性指数

Tab. 1　The first three singularity orders for the V-notch in a medium thickness plate

α/(°)	λ_1		λ_2		λ_3	
	本研究方法	参考解[25]	本研究方法	参考解[25]	本研究方法	参考解[25]
360	0.500 000	0.500 000	0.500 000	0.500 000	0.500 000	0.500 000
340	0.500 427	0.500 426	0.562 010	0.562 007	0.529 412	0.529 412
320	0.503 491	0.503 491	0.638 186	0.638 183	0.562 500	0.562 500
300	0.512 222	0.512 221	0.730 904	0.730 901	0.600 000	0.600 000
280	0.530 396	0.530 396	0.843 444	0.843 440	0.642 857	0.642 857
260	0.562 840	0.562 840	0.980 480	0.980 475	0.692 308	0.692 308
240	0.615 732	0.615 731	1.000 000	1.000 000	0.750 000	0.750 000
220	0.697 166	0.697 165	–	–	0.818 182	0.818 182
200	0.818 696	0.818 696	–	–	0.900 000	0.900 000
180	1.000 000	1.000 000	–	–	1.000 000	1.000 000

图 2 给出了切口张角 $\alpha = 300°$ 时前三阶奇异性指数对应的特征角函数，从图中可以看出，关于 ψ_r、ψ_θ 的特征角函数与关于 w 的特征角函数处于解耦状态。实际计算时，w 与 ψ_r、ψ_θ 的关系仅体现在切口尖点的 2 个转角位移所带来的刚体位移。

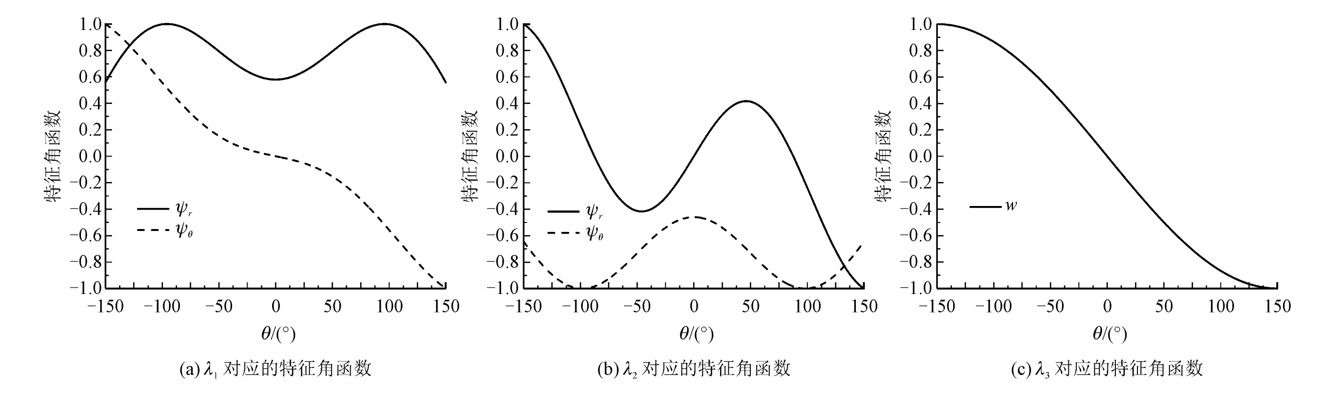


图 2　中厚板切口特征角函数（$\alpha = 300°$）

Fig. 2　Characteristic angle functions for the V-notch in a medium thickness plate ($\alpha = 300°$)

2 中厚板切口奇异强度计算

对由式(1)控制的中厚板弹性弯曲问题,可以通过 Betti 功的互等定理[13]建立中厚板的边界积分方程,即

$$c_{ij}(p)u_j(p) + \int_\Gamma T_{ij}(p,q)u_j(q)\mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma U_{ij}(p,q)t_j(q)\mathrm{d}\Gamma \quad (i,j=1,2,3) \tag{9}$$

式中:p 和 q 为源点以及场点;u_j、t_j 为位移分量和面力分量,当 $j=1,2$ 时,u_j、t_j 分别表示转角位移分量 ψ_x、ψ_y 和由弯矩组合形成的面力分量,当 $j=3$ 时,u_j、t_j 分别表示挠度位移 w 以及由剪力组合形成的面力分量;c_{ij}表示几何系数,一般不需要单独求解,可以通过刚体位移法消除 $\int_\Gamma T_{ij}(p,q)u_j(q)\mathrm{d}\Gamma$ 积分项中的奇异部分,获得非奇异部分与几何系数之和;U_{ij}、T_{ij}分别表示位移基本解以及面力基本解,具体表达式可参见文献[18]。在求解域的边界划分单元,获得离散后的边界积分方程,即

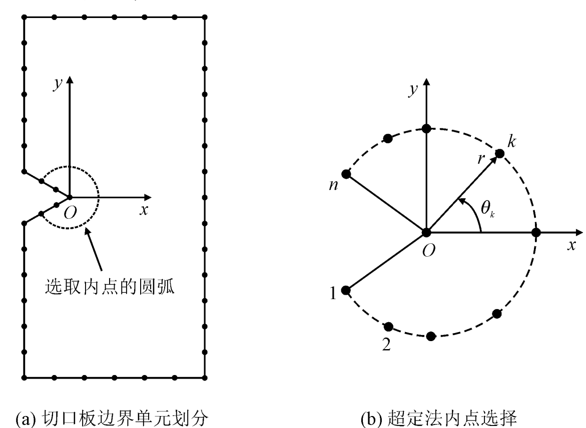
$$c_{ij}(p)u_j(p) + \sum_{k=1}^{M}\int_{\Gamma_k} T_{ij}(p,q)u_j^k(q)\mathrm{d}\Gamma = \sum_{k=1}^{M}\int_{\Gamma_k} U_{ij}(p,q)t_j^k(q)\mathrm{d}\Gamma \quad (i,j=1,2,3) \tag{10}$$

式中:M 表示划分的单元总数;u_j^k 和 t_j^k 表示在第 k 号单元上的位移以及面力。遍历边界节点,列边界积分方程式(10),获得系统的边界积分方程组,引入边界条件后可求解出边界节点的未知量。

应用上述边界元法,计算获得板切口尖端附近各点的 3 个位移分量 ψ_x、ψ_y 和 w,将其与渐近展开式结合,得到包含切口尖点位移 ψ_{x0}、ψ_{y0}、w_0 以及待求幅值系数 A_k 的方程组,即

$$\begin{cases} \psi_x = \psi_{x0} + \cos\theta\sum_{k=1}^{N}A_k r^{\lambda_k}\tilde{\psi}_r(\theta,\lambda_k) - \sin\theta\sum_{k=1}^{N}A_k r^{\lambda_k}\tilde{\psi}_\theta(\theta,\lambda_k) \\ \psi_y = \psi_{y0} + \sin\theta\sum_{k=1}^{N}A_k r^{\lambda_k}\tilde{\psi}_r(\theta,\lambda_k) + \cos\theta\sum_{k=1}^{N}A_k r^{\lambda_k}\tilde{\psi}_\theta(\theta,\lambda_k) \\ w = -\psi_{x0}r\cos\theta - \psi_{y0}r\sin\theta + w_0 + \sum_{k=1}^{N}A_k r^{\lambda_k}\tilde{w}(\theta,\lambda_k) \end{cases} \tag{11}$$

选取距切口尖端为 r 的圆弧上 n 个内点的位移值进行求解,具体取点方式参见图 3。



(a) 切口板边界单元划分 (b) 超定法内点选择

图 3 基于边界元的超定法取点

Fig. 3 Chosen points for over-deterministic method based on boundary element method

在每一个选点上列式(11),形成系统方程组,即

$$\begin{Bmatrix} \psi_{x1} \\ \psi_{y1} \\ w_1 \\ \vdots \\ \psi_{xn} \\ \psi_{yn} \\ w_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & f_{11}^1 & \cdots & f_{1N}^1 \\ 0 & 1 & 0 & f_{11}^2 & \cdots & f_{1N}^2 \\ -r\cos\theta_1 & -r\sin\theta_1 & 1 & f_{11}^3 & \cdots & f_{1N}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & f_{n1}^1 & \cdots & f_{nN}^1 \\ 0 & 1 & 0 & f_{n1}^2 & \cdots & f_{nN}^2 \\ -r\cos\theta_n & -r\sin\theta_n & 1 & f_{n1}^3 & \cdots & f_{nN}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_{x0} \\ \psi_{y0} \\ w_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{Bmatrix} \tag{12}$$

其中:ψ_{xk}、ψ_{yk}、w_k($k=1,2,\cdots,n$)表示选取的第 k 号点的三个位移分量;A_i($i=1,2,\cdots,N$)表示第 i 个渐近展开式的幅值系数;θ_k 表示第 k 号点与 x 轴正向的夹角;f_{ki}^j表示第 k 号点在位移 j 分量上的第 i 个渐近展开项。将式(12)简写为如下的矩阵形式,即

$$\boldsymbol{g}_{3n\times1} = \boldsymbol{C}_{3n\times(N+3)}\boldsymbol{T}_{(N+3)\times1} \tag{13}$$

式中:$\boldsymbol{g}_{3n\times1}$表示 n 个点的位移向量,$\boldsymbol{C}_{3n\times(N+3)}$为渐近展开系数矩阵;$\boldsymbol{T}_{(N+3)\times1}$为包含切口尖点位移以及渐近展开式幅值系数的列向量。可以看出,当选取的节点数 $n>(N+3)/3$ 时,方程(13)为一组超定方程。常规求解线性代数方程组的方法失效,这里采用基于最小二乘法的超定法求解,其超定解为

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g} \tag{14}$$

应力与内力的关系式为

$$\sigma_\theta = \frac{12z}{h^3}M_\theta, \tau_{r\theta} = \frac{12z}{h^3}M_{r\theta}, \tau_{\theta z} = \frac{3}{2h^3}(h^2-4z^2)Q_\theta \tag{15}$$

中厚板切口的应力强度因子计算式[11]为

$$\begin{cases} K_{\mathrm{I}}(z) = \sqrt{2\pi}\lim\limits_{r\to 0} r^{1-\lambda_1}\sigma_\theta(r,0,z) \\ K_{\mathrm{II}}(z) = \sqrt{2\pi}\lim\limits_{r\to 0} r^{1-\lambda_2}\tau_{r\theta}(r,0,z) \\ K_{\mathrm{III}}(z) = \sqrt{2\pi}\lim\limits_{r\to 0} r^{1-\lambda_3}\tau_{\theta z}(r,0,z) \end{cases} \tag{16}$$

求出幅值系数后，将式(15)代入式(16)，可以得到用幅值系数、特征角函数及其导数表示的应力强度因子，即

$$\begin{cases} K_{\mathrm{I}}(z) = -A_1\dfrac{12\sqrt{2\pi}z}{h^3}D[\tilde{\psi}_r(0,\lambda_1)+\tilde{\psi}_\theta'(0,\lambda_1)+v\lambda_1\tilde{\psi}_r(0,\lambda_1)] \\ K_{\mathrm{II}}(z) = -A_2\dfrac{6\sqrt{2\pi}z}{h^3}D(1-v)[\tilde{\psi}_r'(0,\lambda_2)-\tilde{\psi}_\theta(0,\lambda_2)+\lambda_2\tilde{\psi}_\theta(0,\lambda_2)] \\ K_{\mathrm{III}}(z) = A_3\dfrac{3\sqrt{2\pi}}{2h^3}C(h^2-4z^2)\tilde{w}'(0,\lambda_3) \end{cases} \tag{17}$$

从式(17)中可以看出，$K_{\mathrm{I}}(z)$和$K_{\mathrm{II}}(z)$的最大值出现在板的上下表面，即$z=\pm h/2$处，$K_{\mathrm{III}}(z)$的最大值出现在板的中面，即$z=0$处。对中厚板切口而言，3个应力强度因子的最大值应重点关注，分别为

$$\begin{cases} K_{\mathrm{I}} = -A_1\dfrac{6\sqrt{2\pi}}{h^2}D[\tilde{\psi}_r(0,\lambda_1)+\tilde{\psi}_\theta'(0,\lambda_1)+v\lambda_1\tilde{\psi}_r(0,\lambda_1)] \\ K_{\mathrm{II}} = -A_2\dfrac{3\sqrt{2\pi}}{h^2}D(1-v)[\tilde{\psi}_r'(0,\lambda_2)-\tilde{\psi}_\theta(0,\lambda_2)+\lambda_2\tilde{\psi}_\theta(0,\lambda_2)] \\ K_{\mathrm{III}} = A_3\dfrac{3\sqrt{2\pi}}{2h}C\tilde{w}'(0,\lambda_3) \end{cases} \tag{18}$$

将基于边界元的超定法计算得到的幅值系数，以及奇异特征分析得到的奇异性指数、特征角函数及其导数代入式(18)，可以计算出中厚板切口的最大应力强度因子。

3　算　例

本研究依据中厚板切口/裂纹位移级数渐近展开式，以及边界元法计算所得的奇异点附近指定半径上点的位移值，构成待求解方程组，并使用超定法求解超定方程，获得幅值系数，进而求解应力强度因子。首先给出含中心裂纹板在对称弯矩荷载作用下的应力强度因子结果，并与已知参考解进行对比。之后将本研究方法应用在含切口板受各类荷载作用下的应力强度因子与取点半径的关系研究。

1)对称弯曲含中心裂纹方板(例1)

图4所示的方形裂纹板，边长$L=100$，裂纹长度$2l=10$，弯矩$M=1$，四边简支。弹性模量$E=2\times10^6$，泊松比$v=0.3$。计算不同板厚下裂纹右尖端应力强度因子，并与文献[11]和文献[26]的参考解进行对比，结果列于表2。

从表2可以看出，本研究计算得到的应力强度因子与参考解的误差小于1%，说明了本研究方法的有效性。

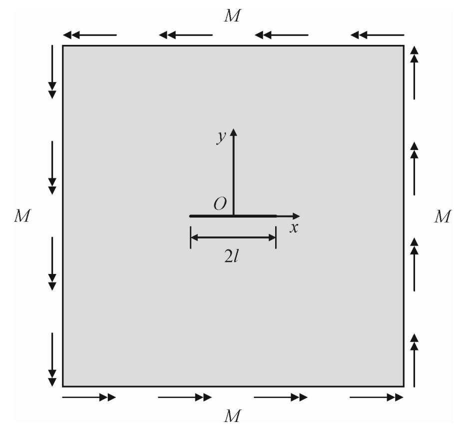


图4　含中心裂纹板受弯曲荷载

Fig. 4　A plate with a central crack subjected to the bending moment

表2　弯曲板中心裂纹应力强度因子 K_{I}

Tab. 2　Stress intensity factors K_{I} of a central crack in a plate under the bending moment

h/l	本研究方法	参考解一[11]	参考解二[26]
1	0.7393	0.7462	0.7446
1.5	0.7841	0.7830	0.7810
2	0.8204	0.8172	0.8150

2)对称弯曲切口板(例2)

图5(a)给出了对称弯矩作用下切口板受力示意图，板宽$W=50$，板长$L=100$，切口深度为l，令$l=W/10$。AB边与CD边设为简支，其余边均为自由。z轴根据右手定则确定，图中没有画出。为获得归一

化应力强度因子值,将弯矩 M 设置为 1,弹性模量 E 也设为 1,泊松比 v 设为 0.3。

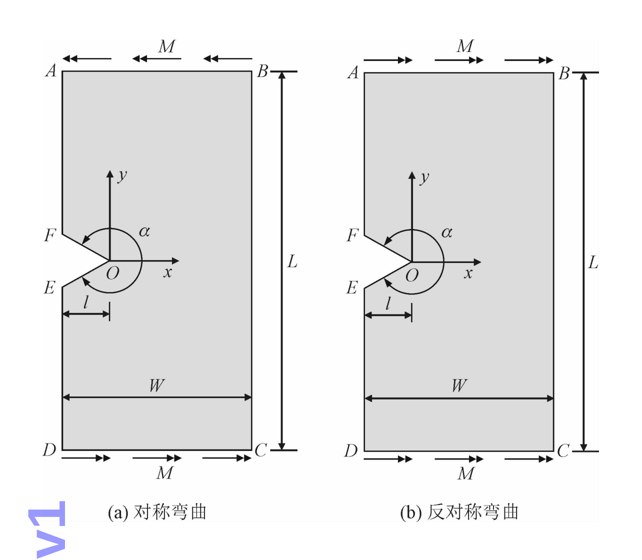


图 5 切口板受弯曲荷载

Fig. 5 A V-notched plate subjected to the bending moment

根据图 5(a)所示的加载模式,切口板在受载后将产生沿 Oxz 平面对称的变形,因此只存在Ⅰ型应力奇异性,切口的应力强度因子也只有 K_{I}。图 6 给出了利用基于边界元的超定法计算得到的应力强度因子 K_{I} 计算结果随取点半径 r 的变化规律。

从图 6 中可以看出,当 α 较小时(如 $\alpha=270°$),取点需要选择相对较大的半径才能获得稳定的应力强度因子计算结果。当 α 较大时(如 $\alpha=300°$),计算所得的应力强度因子受取点半径的影响小。这是由于当 α 较小时,用于计算 K_{I} 的一阶奇异性指数较大,一阶主导项与剩余高阶项之间的数值差距较小,对主导项的计算精度影响较大。从图 6 还可以发现,应力强度因子计算结果的稳定性与板的厚度之间存在比例关系,即板的厚度越厚,计算所得应力强度因子的稳定性越好,这印证了本研究是基于中厚板理论进行的奇异强度分析。当板的厚度较小时,应当换用薄板理论来建立薄板奇异特征方程进行求解。此外,随着板的厚度增加,应力强度因子的值会减小,说明当板越厚时,越不容易发生破坏。

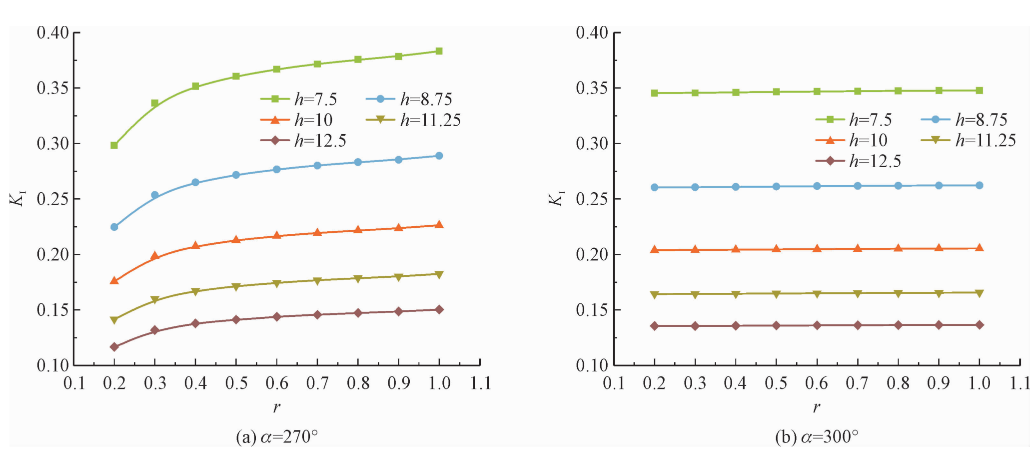


图 6 对称弯曲切口板的 K_{I} 与取点半径 r 的关系

Fig. 6 Variation of K_{I} with r in the V-notched plate under symmetric bending moment

3)反对称弯曲切口板(例 3)

如图 5(b)所示的反对称弯矩作用下的板切口模型,板将沿 Oxz 平面发生反对称变形,从而产生Ⅱ型和Ⅲ型应力奇异性,应力强度因子同时包含 K_{II} 和 K_{III}。

图 7 给出了基于边界元的超定法,计算得到的反对称弯曲切口板的Ⅱ型应力强度因子 K_{II}。从图中可以看出,随着切口张角 α 逐渐减小,应力强度因子计算结果的稳定性在逐渐减弱。随着板厚的增加,应力强度因子计算结果的稳定性在逐渐增强。板的厚度越大,其对应切口的应力强度因子越小,说明破坏板所需的荷载越大,即板越难以被破坏。

图 8 给出了反对称弯曲切口板的Ⅲ型应力强度因子 K_{III} 与取点半径 r 的关系。从图中可以看出,K_{III} 在任意半径下的结果都趋于稳定,说明Ⅲ型应力强度因子的计算结果不受取点半径尺寸影响。比较图 8(a)和图 8(b)会发现,在不同切口角度下 K_{III} 的计算结果都很稳定,说明在反对称加载模式下,Ⅲ型应力强度因子计算结果的稳定性与角度无关。因为无论在对称加载或反对称加载模式下,超定法所使用的边界元法计算得到的位移值中,挠度位移分量 w 都占主导地位,两个转角位移分量 ψ_x 和 ψ_y 相对 w 较小。因此,挠度 w 以及与挠度 w 相关的渐近展开项的计算精度相对较高,使得计算所得的Ⅲ型应力强度因子非常稳定。

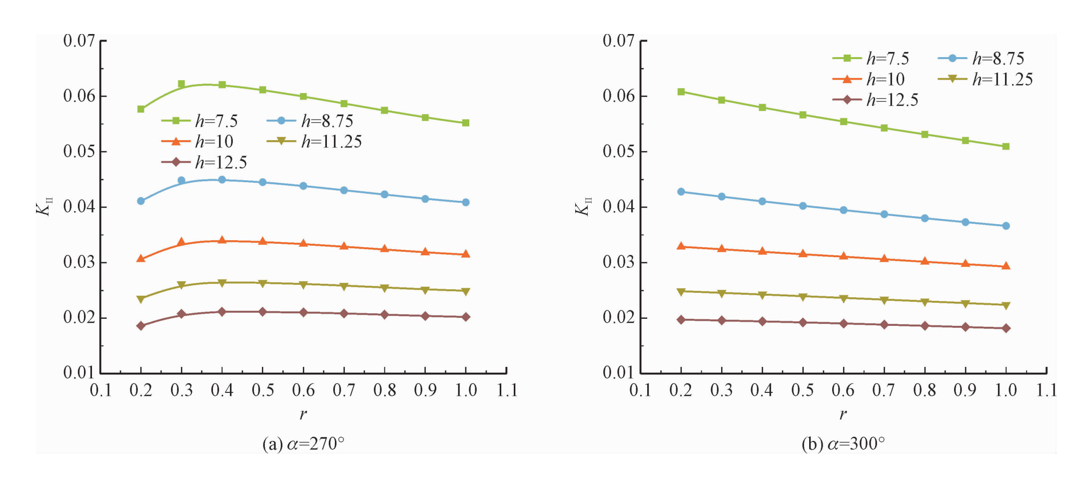


图 7　反对称弯曲切口板的 K_{II} 与取点半径 r 的关系

Fig. 7　Variation of K_{II} with r in the V-notched plate under anti-symmetric bending moment

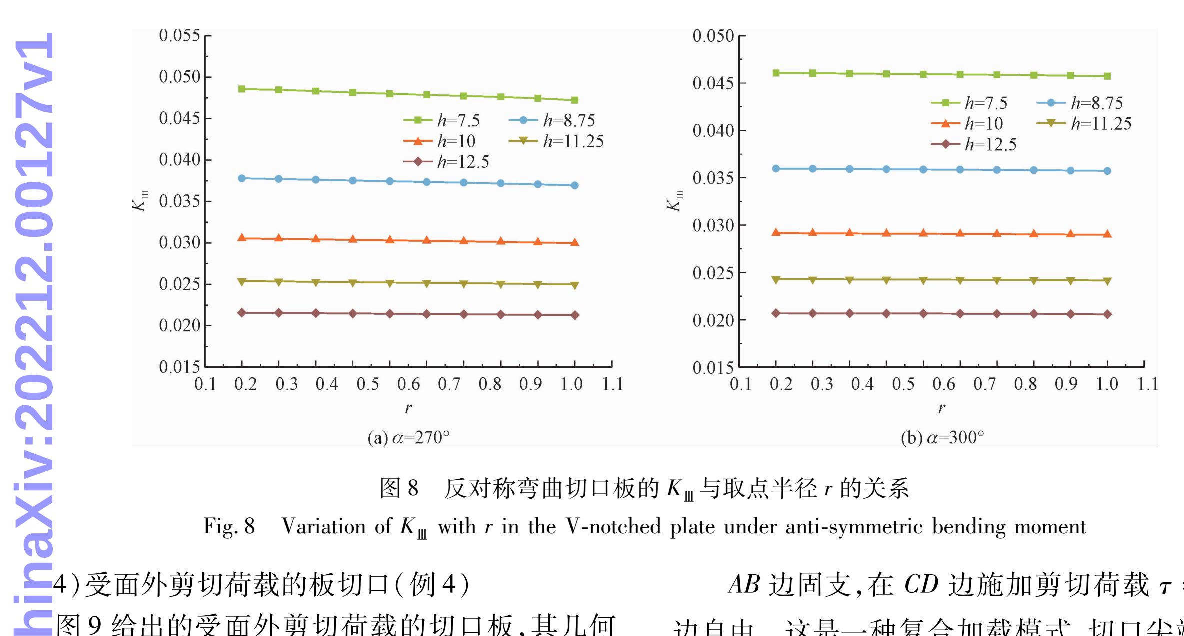


图 8　反对称弯曲切口板的 K_{III} 与取点半径 r 的关系

Fig. 8　Variation of K_{III} with r in the V-notched plate under anti-symmetric bending moment

4)受面外剪切荷载的板切口(例 4)

图 9 给出的受面外剪切荷载的切口板,其几何尺寸以及材料参数与例 1 相同。

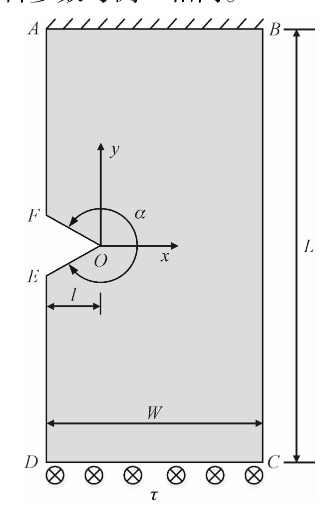
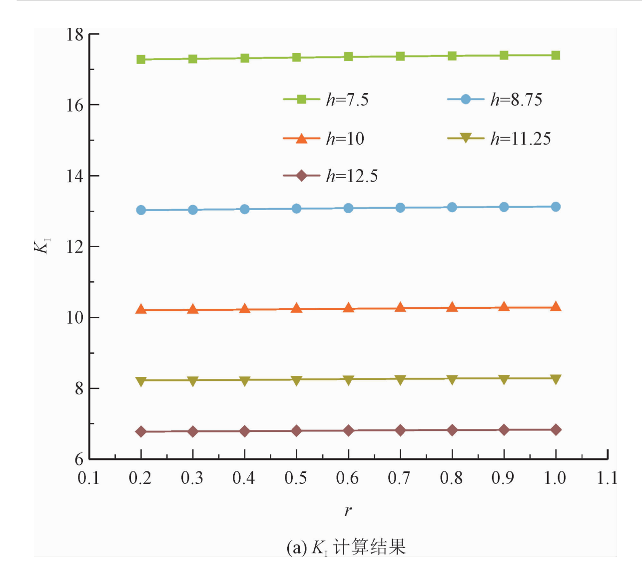


图 9　受面外剪切荷载的切口板

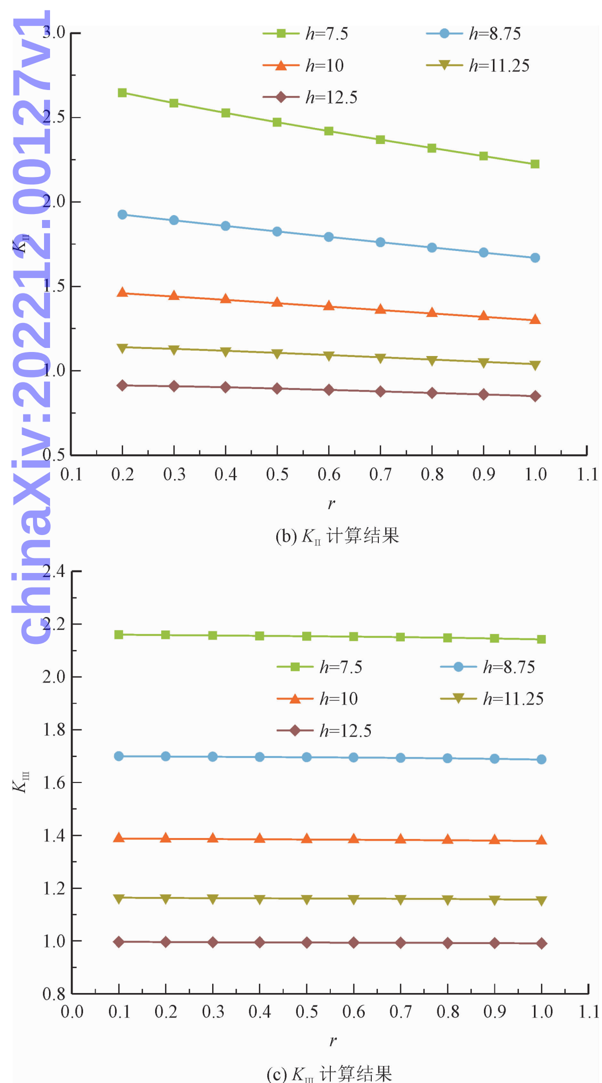
Fig. 9　A V-notched plate subjected to the transverse shear

AB 边固支,在 *CD* 边施加剪切荷载 $\tau=1$,其余边自由。这是一种复合加载模式,切口尖端将同时产生Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种类型的应力奇异性,使用基于边界元的超定法计算,可以同时获得 3 个应力强度因子。

图 10 给出了切口张角 $\alpha=300°$时,受面外剪切力作用的板切口的应力强度因子计算结果。从图可以看出,受面外剪切荷载作用切口板的Ⅰ型和Ⅲ型应力强度因子,在选取不同半径点进行计算时,结果保持稳定,仅有Ⅱ型应力强度因子受取点半径影响较大,但随着板厚加大,这种影响也逐渐消失,即当板厚较大时,K_{II} 也不受选点半径影响。因此,在复合加载模式下,基于边界元的超定法可以准确地计算出与纯Ⅰ型或Ⅱ、Ⅲ复合型切口板同样稳定的应力强度因子。



(a) K_I 计算结果



(b) K_{II} 计算结果

(c) K_{III} 计算结果

图 10　受面外剪切荷载切口板应力强度因子($\alpha = 300°$)

Fig. 10　Stress intensity factors of a V-notch in a plate under transverse shear ($\alpha = 300°$)

4　结　论

本研究基于中厚板的控制方程,采用切口尖端特征渐近展开理论,建立了中厚板的奇异性特征方程,获取了中厚板切口的奇异性指数以及对应的特征角函数。再应用边界元法计算切口尖端附近内点的位移。最后基于奇性特征分析结果以及内点位移计算值,形成非正定方程组,采用超定法,求解出渐近展开式的幅值系数,进而获得中厚板切口的应力强度因子。

研究发现中厚切口板的转角位移特征角函数与挠度特征角函数处于解耦状态,转角位移对挠度位移的影响仅体现在刚体位移上。计算发现,中厚切口板的厚度越厚,应力强度因子计算结果受边界元法取点半径影响越小。对于对称弯曲切口板,仅存在Ⅰ型应力强度因子,随着切口张角的增大,其计算结果受边界元法取点半径的影响越小。对于反对称弯曲切口板,存在Ⅱ、Ⅲ型应力强度因子,其中Ⅱ型应力强度因子计算结果的稳定性,随着切口张角的增大受取点半径的影响越小,而Ⅲ型应力强度因子计算结果的稳定性不受取点半径影响。对于受面外荷载的切口板,同时存在Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ型应力强度因子,其中Ⅰ、Ⅲ型应力强度因子,在选取不同半径点计算时,结果保持稳定,Ⅱ型应力强度因子受取点半径影响大,取点半径越大,计算结果越稳定。

本研究所提的边界元法结合特征渐近展开求解含切口板弯曲问题的方法,可以有效计算工程中含切口/裂纹板受弯曲荷载时的应力分布,同时也可以获得切口的应力强度因子,与已有断裂准则相结合,可判断切口板结构的安全状态。

参考文献:

[1] MAUCHER R, HARTMANN F. Corner singularities of Kirchhoff plates and the boundary element method[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1999, 173(3/4): 273-285.

[2] MINDLIN R D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates[J]. Journal of applied mechanics, 1951, 18(1): 31-38.

[3] REISSNER E. On the theory of bending of elastic plates[J]. Journal of mathematics and physics, 1944, 23(1/2/3/4): 184-191.

[4] REISSNER E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates[J]. Journal of applied mechanics, 1945, 12(2): A69-A77.

[5] WILLIAMS M L. The bending stress distribution at the base of a stationary crack[J]. Journal of applied mechanics, 1961, 28(1): 78-82.

[6] 柳春图, 蒋持平. 板壳断裂力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.

[7] WANG N M. Twisting of an elastic plate containing a crack[J]. International journal of fracture mechanics, 1970, 6(4): 367-378.

[8] DELATE F, ERDOGAN F. The effect of transverse shear in a cracked plate under skew-symmetric loading[J]. Journal of applied mechanics, 1979, 46(3): 618-624.

[9] 柳春图. 承受弯曲的板在裂纹顶端附近的应力和变形[J]. 固体力学学报, 1983(3): 441-448.
LIU Chuntu. Stresses and deformations near the crack tip for bending plate[J]. Acta mechanica solida Sinica, 1983(3): 441-448 (in Chinese).

[10] QIAN J, LONG Y Q. The expression of stress and strain at the tip of notch in reissner plate[J]. Applied mathematics and mechanics, 1992, 13(4): 315-324.

[11] YAO W A, ZHANG Z J, HU X F. A singular element for reissner plate bending problem with V-shaped notches[J]. Theoretical and applied fracture mechanics, 2014, 74: 143-156.

[12] BREBBIA C A. The boundary element method for engineers[M]. New York: Wiley, 1978.

[13] 龙述尧. 边界单元法概论[M]. 北京: 中国科学文化出版社, 2002.

[14] ALTIERO N J, SIKARSKIE D L. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form[J]. Computers & structures, 1978, 9(2): 163-168.

[15] WU B C, ALTIERO N J. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions[J]. Computers & structures, 1979, 10(4): 703-707.

[16] WEEËN F V. Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model[J]. International journal for numerical methods in engineering, 1982, 18(1): 1-10.

[17] LONG S Y, BREBBIA C A, TELLES J C F. Boundary element bending analysis of moderately thick plates[J]. Engineering analysis, 1988, 5(2): 64-74.

[18] 龙述尧, 姜琛. 中厚板理论的适用范围和精确程度的研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2012, 39(1): 37-41.
LONG Shuyao, JIANG Chen. Research on the applicable range and accuracy of moderately thick plate theory[J]. Journal of Hunan University(natural sciences), 2012, 39(1): 37-41 (in Chinese).

[19] NIU Z R, GE D L, CHENG C Z, et al. Evaluation of the stress singularities of plane V-notches in bonded dissimilar materials[J]. Applied mathematical modelling, 2009, 33(3): 1776-1792.

[20] 李春旺, 罗秀芹, 杨百愚, 等. 基于有限元方法的航空发动机叶片应力强度因子计算[J]. 应用力学学报, 2013, 30(3): 373-377.
LI Chunwang, LUO Xiuqin, YANG Baiyu, et al. Stress intensity factor calculation for aero-engine compressor blade with finite element method[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2013, 30(3): 373-377 (in Chinese).

[21] CHEN M C, PING X C. A novel hybrid finite element analysis of inplane singular elastic field around inclusion corners in elastic media[J]. International journal of solids and structures, 2009, 46(13): 2527-2538.

[22] LI J, KHODAEI Z S, ALIABADI M H. Dynamic dual boundary element analyses for cracked Mindlin plates[J]. International journal of solids and structures, 2018, 152/153: 248-260.

[23] USECHE J. Fracture dynamic analysis of cracked reissner plates using the boundary element method[J]. International journal of solids and structures, 2020, 191/192: 315-332.

[24] YAO S L, ZAPPALORTO M, CHENG C Z, et al. Determination of high-order fields for multianisotropic material antiplane V-notches and inclusions by the asymptotic expansion technique and an overdeterministic method[J]. Fatigue & fracture of engineering materials & structures, 2020, 43(7): 1384-1398.

[25] HUANG C S. Stress singularities at angular corners in first-order shear deformation plate theory[J]. International journal of mechanical sciences, 2003, 45(1): 1-20.

[26] HARTRANFT R J, SIH G C. Effect of plate thickness on the bending stress distribution around through cracks[J]. Journal of mathematics and physics, 1968, 47(1/2/3/4): 276-291.

（编辑　黄崇亚　史淑英）